Correction TD N°1 systèmes échantillonnés

Exercice 1. .

Ts	Indice des échantillons (k)	S(t)=
0.8	2	$\delta(t-2T_s)=\delta(t-1.6)$
1.5	1	$\delta(t-T_s)=\delta(t-1)$
0.5	2, 3 et 4	$\delta(t-2T_s)+\delta(t-3T_s)$ $+\delta(t-4T_s)=\delta(t-0.5)$ $+\delta(t-1)+\delta(t-1.5)$
1	1 et 2	$\delta(t-T_s)+\delta(t-2T_s)$ $=\delta(t-1)+\delta(t-2)$
2	1	$\delta(t-T_s)=\delta(t-2)$
3	Pas d'échantillons non nuls	0

Exercice 2. (calcul de la transformée en z d'un train d'impulsion)

Le signal $s^*(t)$, que nous pouvons représenter graphiquement (figure 11.18) peut être écrit sous la forme d'une différence de deux signaux :

$$s^*(t)=s_1^*(t)-s_2^*(t)$$

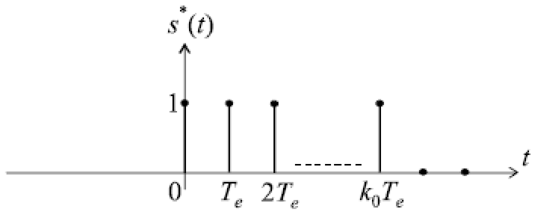

Figure 11.18 Train d'impulsions.

Le signal $s_1^*(t)$ est un échelon unitaire et le signal $s_2^*(t)$ est un échelon unitaire retardé de k_0+1 échantillons (soit d'un temps $(k_0+1)T_e$.

Par conséquent : $$S(z)=S_1(z)-S_2(z)$$

avec : $$S_1(z)=\frac{z}{z-1}$$

et : $$S_2(z)=\frac{z}{z-1}\cdot z^{-(k_0+1)}$$

d'où : $$S(z)=\frac{z-z^{-k_0}}{z-1}$$

Correction TD N°1 systèmes échantillonnés

Exercice 3. (Calcul de la transformée en *z* d'une sinusoïde échantillonnée)

$$s(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

La transformation en z étant linéaire, on a :

$$S(z) = \frac{1}{2j}\left[Z\left(e^{j\omega t}\right) - Z\left(e^{-j\omega t}\right)\right]$$

soit :

$$S(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z - e^{j\omega T_e}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T_e}}\right]$$

$$S(z) = \frac{1}{2j}\frac{z\left(z - e^{-j\omega T_e} - z + e^{j\omega T_e}\right)}{\left(z - e^{j\omega T_e}\right)\left(z - e^{-j\omega T_e}\right)} = \frac{1}{2j}\frac{z\left(e^{j\omega T_e} - e^{-j\omega T_e}\right)}{\left[z^2 - z\left(e^{j\omega T_e} + e^{-j\omega T_e}\right) + 1\right]}$$

d'où :

$$S(z) = \frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z\cos \omega T_e + 1}$$

Exercice 4. (Fonction de transfert et relation de récurrence)

La fonction de transfert en z se détermine immédiatement à partir de l'équation de récurrence :

$$s_k = 0{,}5 e_{k-1} - 0.6 s_{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad S(z) = 0{,}5 z^{-1} E(z) - 0{,}6 z^{-1} S(z)$$

d'où :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0{,}5 z^{-1}}{1 + 0{,}6 z^{-1}} = \frac{0{,}5}{z + 0{,}6}$$

Lorsqu'on injecte un échelon unité à l'entrée de ce système, on a :

$$S(z) = G(z)E(z) = \frac{0{,}5}{z + 0{,}6} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

La valeur finale du signal de sortie est donc :

$$\lim_{k \to +\infty} s_k = \lim_{z \to 1}\left(1 - z^{-1}\right) S(z) = \lim_{z \to 1}\left(\frac{z-1}{z} \cdot \frac{0{,}5}{z + 0{,}6} \cdot \frac{z}{z - 1}\right)$$

soit :

$$\lim_{k \to +\infty} s_k = \lim_{z \to 1}\left(\frac{0{,}5}{z + 0{,}6}\right) = 0{,}3125$$

Correction TD N°1 systèmes échantillonnés

Exercice 5. (Calcul d'une série d'échantillons de sortie)

· La fonction de transfert en z nous conduit immédiatement à l'équation de récurrence :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0{,}25z^{-1} + 0{,}25z^{-2}} \quad \Leftrightarrow \quad S(z)\left[1 - 0{,}25z^{-1} + 0{,}25z^{-2}\right] = E(z)\left[1 - z^{-1}\right]$$

d'où : $$s_k - 0{,}25s_{k-1} + 0{,}25s_{k-2} = e_k - e_{k-1}$$

Nous retiendrons : $$s_k = e_k - e_{k-1} + 0{,}25s_{k-1} - 0{,}25s_{k-2}$$

Calculons les échantillons de sortie (tableau 11.1) et représentons les graphiquement (figure 11.19).

Tableau 11.1 CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t	0	T_e	$2T_e$	$3T_e$	$4T_e$	$5T_e$	$6T_e$	$7T_e$	$8T_e$
e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	1	0,250	– 0,188	– 0,109	0,020	0,032	0,003	– 0,007	– 0,003

Calculons pour finir la valeur finale du signal :

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{z\to 1}\left(1 - z^{-1}\right) S(z) = \lim_{z\to 1}\left(1 - z^{-1}\right) G(z)E(z)$$

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0{,}25z^{-1} + 0{,}25z^{-2}} \cdot \frac{z}{z-1}\right)$$

Correction TD N°1 systèmes échantillonnés

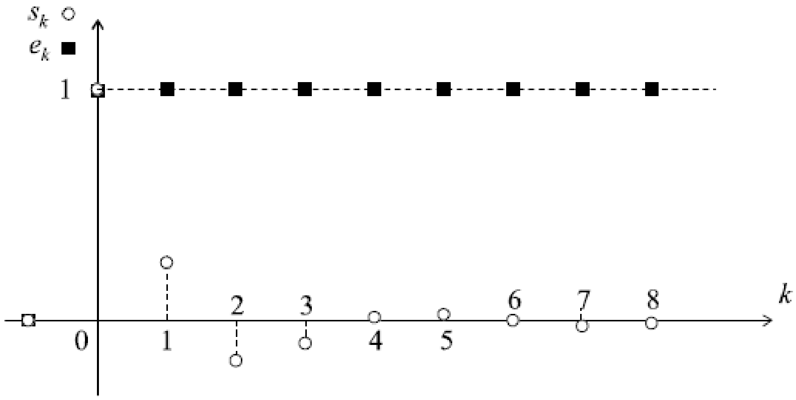

Figure 11.19 Représentation temporelle de la sortie du système.

La valeur finale du signal de sortie est donc :

$$\lim_{k \to +\infty} s_k = 0$$