Correction du TD N°2

Exe :1 Calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K}{(z - 0{,}4)(z - 0{,}8) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D(z) = z^2 - 1{,}2z + 0{,}32 + K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 1 > 0{,}32 + K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}12 + K > 0 \\ 2{,}52 + K > 0 \\ K < 0{,}68 \end{cases}$$

La condition de stabilité se résume donc à : $K < 0{,}68$.

Pour calculer, dans les deux cas demandés, la suite d'échantillons de sortie, exprimons l'équation de récurrence du système à partir de la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}32 + K} = \frac{Kz^{-2}}{1 - 1{,}2z^{-1} + (0{,}32 + K)\, z^{-2}}$$

d'où :

$$s_k = 1{,}2s_{k-1} - (0{,}32 + K)\, s_{k-2} + Ke_{k-2}$$

Pour $K = 0{,}3$, on a :

$$s_k = 1{,}2s_{k-1} - 0{,}62s_{k-2} + 0{,}3e_{k-2}$$

Ce qui nous permet, pour une entrée en échelon unité, de calculer et tracer les valeurs des échantillons de sortie.

Tableau 1 CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0	0,300	0,660	0,906	0,978	0,911	0,787	0,680

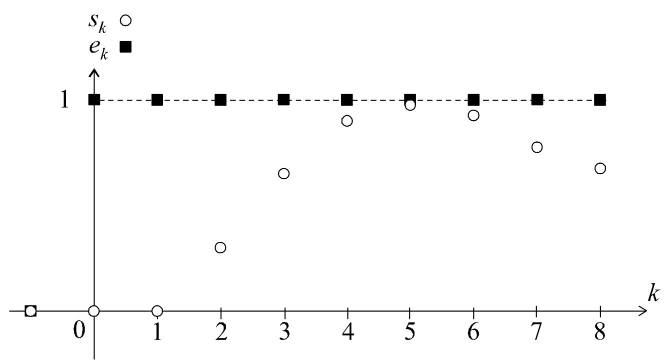

Figure1 Représentation temporelle de la sortie du système.

En calculant plus d'échantillons, on montre effectivement la convergence du signal de sortie, ce qui prouve la stabilité du système, dans ce cas.

Pour $K = 1$, on a :

$$s_k = 1{,}2s_{k-1} - 1{,}32s_{k-2} + e_{k-2}$$

Ce qui nous permet, pour une entrée en échelon unité, de calculer et tracer les valeurs des échantillons de sortie.

Tableau 1.2 CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0	1,000	2,200	2,320	0,880	–1,006	–1,369	0,685

En calculant plus d'échantillons, on montre effectivement l'absence de convergence du signal de sortie qui oscille en divergeant, ce qui confirme l'instabilité du système, dans ce cas.

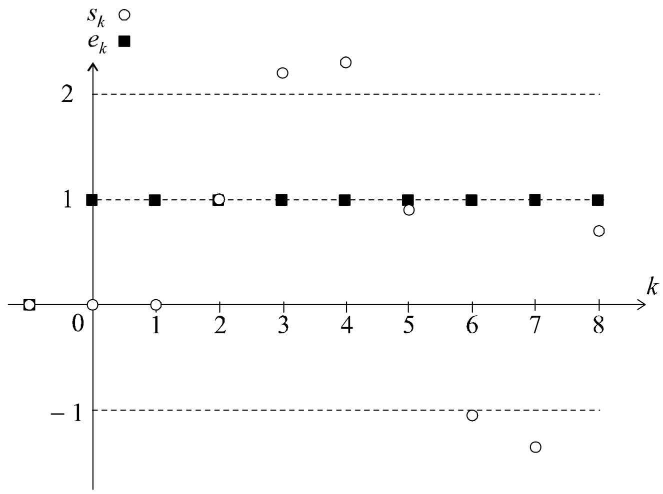

Figure 1.3 Représentation temporelle de la sortie du système.

Ex 2 Calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{Kz}{(z - 0{,}9) + Kz} = \frac{Kz}{(K+1)\,z - 0{,}9}$$

L'unique pôle de la fonction de transfert est :

$$p_1 = \frac{0{,}9}{K+1}$$

Le système est stable si et seulement si le module de ce pôle est inférieur à 1 :

$$\frac{0{,}9}{K+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad K > -0{,}1$$

Le système est donc toujours stable, quelle que soit la valeur positive de K.
Calculons à présent l'erreur de position du système en boucle fermée :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} \left[\frac{1}{1 + G(z)} \right] = \frac{1}{\lim\limits_{z \to 1} \left(1 + \dfrac{Kz}{z - 0{,}9} \right)} = \frac{1}{1 + 10K}$$

Pour obtenir une erreur de position de 10 %, soit $\varepsilon_p = 0{,}1$, on doit avoir :

$$\frac{1}{1 + 10K} = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}9$$

Dans ces conditions, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(z) = \frac{0{,}9z}{1{,}9z - 0{,}9} = \frac{0{,}474}{1 - 0{,}474z^{-1}}$$

d'où la relation de récurrence qui régit le système en boucle fermée :

$$s_k = 0{,}474e_k + 0{,}474s_{k-1}$$

Calculons (tableau 2.1) et représentons graphiquement (fi gure 2.1) la suite d'échantillons de sortie. Compte tenu de la vitesse de convergence de la suite (s_k), autrement dit, de la rapidité du système, l'erreur de position se mesure très facilement dès les premiers échantillons.

Tableau2.1 CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0,474	0,699	0,805	0,856	0,880	0,891	0,896	0,899	0,900

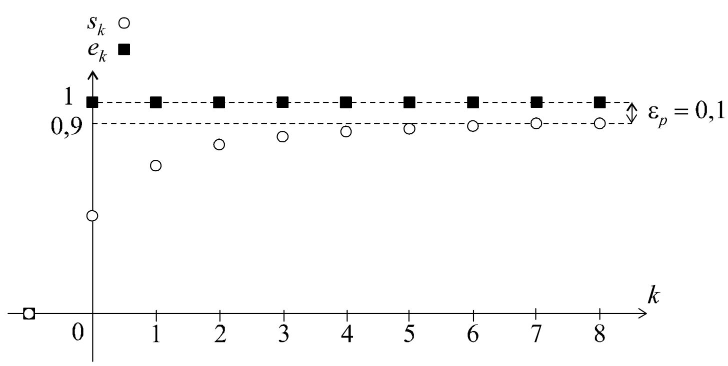

Figure2.1 Représentation temporelle de la sortie du système.

Ex 3 Calculons la fonction de transfert équivalente en z du système en boucle fermée :

On a : $$G(p) = \frac{K}{p+10} \quad \to \quad G(z) = \frac{K\left(1 - e^{-10T_e}\right)}{10\left(z - e^{-10T_e}\right)}$$

Soit en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K\left(1 - e^{-10T_e}\right)}{10\left(z - e^{-10T_e}\right) + K\left(1 - e^{-10T_e}\right)} = \frac{K\left(1 - e^{-10T_e}\right)}{10z - 10\,e^{-10T_e} + K\left(1 - e^{-10T_e}\right)}$$

Ce système est stable si et seulement si l'unique pôle de cette fonction de transfert en boucle fermée possède un module inférieur à 1.

Soit : $$\left|\frac{10\,e^{-10T_e} + K\left(e^{-10T_e} - 1\right)}{10}\right| < 1$$

Remarquons tout d'abord que : $$\left(e^{-10T_e} - 1\right) < 0, \quad \forall\, T_e > 0$$

Si : $$10\,e^{-10T_e} + K\left(e^{-10T_e} - 1\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad K < \frac{10\,e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

on a alors : $$10\,e^{-10T_e} + K\left(e^{-10T_e} - 1\right) < 10$$

d'où : $$K > \frac{10 - 10\,e^{-10T_e}}{e^{-10T_e} - 1} \quad \Rightarrow \quad K > -10$$

qui est toujours vrai, donc $K < \dfrac{10\,e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$ est une condition suffisante de stabilité.

Si au contraire : $$10\,e^{-10T_e} + K\left(e^{-10T_e} - 1\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad K > \frac{10\,e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

on a alors : $$-10\,e^{-10T_e} - K\left(e^{-10T_e} - 1\right) < 10$$

d'où : $$K < \frac{10 + 10\,e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

Cette valeur étant supérieure à celle trouvée précédemment, on en déduit, en résumant les deux cas, la condition nécessaire et suffisante de stabilité :

$$K < \frac{10 + 10\,e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

Ce seuil de stabilité dépend de la valeur de la période d'échantillonnage.

Pour $T_e = 1$ s, on a : $$K < 10$$

Pour $T_e = 0{,}1$ s, on a : $$K < 21{,}6$$

Pour $T_e = 0{,}02$ s, on a : $$K < 100$$

Conclusion : le seuil de stabilité est d'autant plus important que la période d'échantillonnage est faible.

Réglons à présent le gain sur $K = 50$. La condition de stabilité s'exprime par :

$$50 < \frac{10 + 10\,e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

soit : $$50\left(1 - e^{-10T_e}\right) < 10 + 10\,e^{-10T_e}$$

d'où : $$e^{-10T_e} > \frac{2}{3}$$

Finalement : $$T_e < -\frac{1}{10}\ln\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad T_e < 0{,}04 \text{ s}$$

Conclusion : le choix d'un critère de stabilité concernant le gain statique impose une condition sur la période d'échantillonnage.

EX 4 Calculons la fonction de transfert équivalente en z du système en boucle ouverte, à partir de l'équivalent à la dérivation :

$$G_1(z) = \frac{K}{\left(\dfrac{z-1}{0{,}2z}+1\right)\left(\dfrac{z-1}{0{,}2z}+3\right)} = \frac{0{,}04Kz^2}{(1{,}2z-1)(1{,}6z-1)}$$

soit encore :
$$G_1(z) = \frac{0{,}04Kz^2}{1{,}92z^2 - 2{,}8z + 1}$$

En utilisant l'équivalent à l'intégration, on obtient :

$$G_2(z) = \frac{K}{\left(\dfrac{10z-10}{z+1}+1\right)\left(\dfrac{10z-10}{z+1}+3\right)} = \frac{K\,(z+1)^2}{(11z-9)(13z-7)}$$

soit encore :
$$G_2(z) = \frac{K\,(z+1)^2}{143z^2 - 194z + 63}$$

Quant à la table des équivalents fournie en annexe D, elle nous donne :

$$G_3(z) = \frac{K\left(1-\mathrm{e}^{-T_e}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-3T_e}\right)}{3\,(z-\mathrm{e}^{-T_e})\left(z-\mathrm{e}^{-3T_e}\right)} = \frac{0{,}081K}{3\,(z-0{,}82)(z-0{,}55)}$$

soit encore :
$$G_3(z) = \frac{0{,}081K}{3z^2 - 4{,}11z + 1{,}35}$$

Calculons à présent les trois fonctions de transfert en boucle fermée et déterminons, pour chacune d'entre elles, les conditions de stabilité.

Tout d'abord :
$$H_1(z) = \frac{0{,}04Kz^2}{(1{,}92+0{,}04K)\,z^2 - 2{,}8z + 1}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D_1(z) = (1{,}92+0{,}04K)\,z^2 - 2{,}8z + 1$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 1{,}92+0{,}04K > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}12+0{,}04K > 0 \\ 5{,}72+0{,}04K > 0 \\ K > -23 \end{cases}$$

Comme $K > 0$, le système est inconditionnellement stable.

On a ensuite :
$$H_2(z) = \frac{K\,(z+1)^2}{143z^2 - 194z + 63 + K\,(z+1)^2}$$

soit :
$$H_2(z) = \frac{K\,(z+1)^2}{(143+K)\,z^2 - (194-2K)\,z + 63 + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D_2(z) = (143+K)\,z^2 - (194-2K)\,z + 63 + K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 143+K > 63+K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+4K > 0 \\ 400 > 0 \\ 143 > 63 \end{cases}$$

Comme $K > 0$, le système est inconditionnellement stable.

Pour finir :
$$H_3(z) = \frac{0{,}081K}{3z^2 - 4{,}11z + 1{,}35 + 0{,}081K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D_3(z) = 3z^2 - 4{,}11z + 1{,}35 + 0{,}081K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 3 > 1{,}35+0{,}081K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}24+0{,}081K > 0 \\ 8{,}46+0{,}081K > 0 \\ K < 20{,}4 \end{cases}$$

Comme $K > 0$, la condition de stabilité se résume à : $K < 20{,}4$.
Conclusion : les équivalents à la dérivation et à l'intégration ne permettent pas toujours de rendre compte d'une possible instabilité d'un système échantillonné censé être équivalent à un système à temps continu qui, lui, est inconditionnellement stable.

Ex 5 Avant de calculer la fonction de transfert en boucle fermée, déterminons tout de suite la condition sur les paramètres du système de manière à obtenir l'erreur statique attendue :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \to 1}\left[\frac{1}{1 + G(z)}\right] = \frac{1}{\displaystyle\lim_{z \to 1}\left(1 + \frac{K}{z^2 - az + b}\right)} = \frac{1 - a + b}{K + 1 - a + b}$$

On doit donc avoir : $$\varepsilon_p = \frac{1 - a + b}{K + 1 - a + b} = 0{,}2$$

Calculons à présent la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{K}{z^2 - az + b + K}$$

Le comportement souhaité en boucle fermée est comparable à celui d'un système du second ordre en régime oscillatoire amorti.

Nous savons, dans ces conditions, que :

$$H(z) = \frac{K_{\mathrm{BF}}\left(1 + \mathrm{e}^{-2\xi_{\mathrm{BF}}\omega_{n\mathrm{BF}}T_e} - 2\,\mathrm{e}^{-\xi_{\mathrm{BF}}\omega_{n\mathrm{BF}}T_e}\cos\omega_{n\mathrm{BF}}T_e\sqrt{1 - \xi_{\mathrm{BF}}^2}\right)}{z^2 - 2z\,\mathrm{e}^{-\xi_{\mathrm{BF}}\omega_{n\mathrm{BF}}T_e}\cos\omega_{n\mathrm{BF}}T_e\sqrt{1 - \xi_{\mathrm{BF}}^2} + \mathrm{e}^{-2\xi_{\mathrm{BF}}\omega_{n\mathrm{BF}}T_e}}$$

D'après l'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre, on a :

$$d = 30\ \% \quad \Rightarrow \quad \xi_{\mathrm{BF}} \approx 0{,}35$$

Par ailleurs : $$t_m = 2{,}5\ \mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \omega_{n\,\mathrm{BF}} \approx \frac{3}{2{,}5} = 1{,}2\ \mathrm{rad/s}$$

En appliquant l'expression ci-dessus, la fonction de transfert en boucle fermée qui possédera les performances dynamiques requises, a pour expression :

$$H(z) = \frac{0{,}29K_{\mathrm{BF}}}{z^2 - 1{,}37z + 0{,}66}$$

On a donc : $$\begin{cases} a = 1{,}37 \\ b + K = 0{,}66 \end{cases}$$

Or : $$\varepsilon_p = \frac{1 - a + b}{K + 1 - a + b} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad \frac{b - 0{,}37}{0{,}29} = 0{,}2$$

d'où : $$b = 0{,}428$$

et : $$K = 0{,}232$$

On a, par ailleurs : $$K = 0{,}29K_{\mathrm{BF}} \quad \Rightarrow \quad K_{\mathrm{BF}} = 0{,}8$$

Résultat tout à fait prévisible puisque l'erreur statique, en boucle fermée, doit être égale à 0,2.
En résumé, la fonction de transfert en boucle fermée correspondant au cahier des charges attendu a pour expression :

$$H(z) = \frac{0{,}232}{z^2 - 1{,}37z + 0{,}66}$$

et elle correspond, en boucle ouverte, à la fonction :

$$G(z) = \frac{0{,}232}{z^2 - 1{,}37z + 0{,}428}$$

En boucle fermée, l'équation de récurrence est :

$$s_k = 1{,}37s_{k-1} + 0{,}66s_{k-2} + 0{,}232e_{k-2}$$

Le calcul des premiers échantillons de sortie (tableau 6.1) et leur tracé (figure 6.1) permet de mettre en évidence le temps de montée et la valeur du dépassement. Un calcul plus approfondi des échantillons suivants montre la convergence assez rapide vers la valeur finale du signal (soit pour une entrée en échelon unité : $s_\infty = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$).
Le dépassement est certes légèrement plus important que prévu et le temps de montée un peu plus court, mais la technique que nous venons d'employer prouve, malgré tout, toute son efficacité.

Tableau 6.1 CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

e_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1
s_k	0	0	0,232	0,550	0,832	1,009	1,065	1,025	0,934

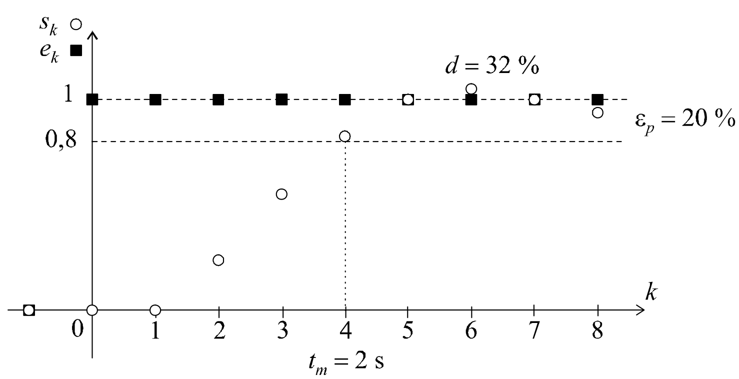

Figure 6.1 Représentation temporelle de la sortie du système.

Ex 6

1. Critère de jury :

$$\begin{cases} b_0 + b_1 + b_2 = -0.25 + 1 + 1 > 0 \\ b_0 - b_1 + b_2 = -0.25 - 1 + 1 < 0 \\ b_2 - b_0 = 1 - 0.25 > 0 \end{cases}$$

La deuxième condition de stabilité n'est pas vérifiée et donc le système associé à cette équation caractéristique est instable. En effet, les racines de l'équation caractéristique sont : -1.2 et 0.2

2. Critère de Routh

On rappelle que le critère de Routh permet de déterminer l'existence de pôles à partie réelle positive à partir de l'étude des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, et ceci sans expliciter ces pôles. (Voir cours des systèmes linéaires continus)

Il est possible **d'appliquer le critère de Routh aux systèmes discrets** en utilisant la transformation appelée la transformation en w,.

La transformation en w est la fonction complexe de la variable complexe z définie par l'expression suivante :

$$\omega = \frac{z-1}{z+1} <=> z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$$

Pour appliquer le critère de Routh-Hurwitz à un système discret, il suffit alors de transformer son équation caractéristique par la transformée en w et d'appliquer le critère de Routh pour le nouveau polynôme obtenu.

On applique la transformation en w :

$$D(w)= \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} - 0.25=0$$

soit : $-0.25w^2 + 2.5w + 1.75 = 0$ **. La table de Routh correspondant est donnée par :**

w^2	**-0.25**	**1.75**
w^1	**2.5**	**0**
w^0	**1.75**	

Il y'a un changement de signe dans la première colonne de la table de Routh; cela implique la présence de pôle à partie réelle positive. D'où la même conclusion sur la stabilité; à savoir que le système associé à l'équation caractéristique est instable.