

Chapitre II : Etude et analyse des circuits en courant alternatif

1 Grandeurs caractéristiques des fonctions périodiques

1.1 Signal périodique quelconque :

Une grandeur physique (tension, courant, etc.) est dite périodique si elle reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux.

Période T : temps minimal nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction.

Fréquence F : inverse de la période.

$$F = \frac{1}{T}$$

Valeur instantanée u(t) : la fonction elle-même.

Valeur maximale U : amplitude maximale ou de crête.

Valeur moyenne U_{moy} :

$$U_{moy} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t) \cdot dt$$

Valeur efficace U_{eff} :

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} u^2(t) \cdot dt$$

1.2 Régime permanent sinusoïdal

On parle de régime permanent sinusoïdal lorsque l'évolution temporelle des signaux correspond à des sinusoides. La forme générale d'un signal sinusoïdal est donc :

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

Rappelons quelques définitions :

- ✓ Phase instantanée : $\omega t + \varphi$
- ✓ Phase à l'origine : φ
- ✓ Pulsation : ω
- ✓ Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- ✓ Fréquence : $F = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Calculons les valeurs moyenne et efficace :

$$U_{\text{moy}} = \frac{U}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \cdot dt = 0$$

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{U^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) \cdot dt = \frac{U^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2(\omega t + \varphi))}{2} \cdot dt = 0$$

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{U^2}{2T} \int_0^T 1 + \cos(2(\omega t + \varphi)) \cdot dt = \frac{U^2}{2T} \left(\underbrace{\int_0^T 1}_{\frac{T}{1}} + \underbrace{\int_0^T \cos(2(\omega t + \varphi)) \cdot dt}_0 \right) = \frac{U^2}{2}$$

$$\text{Et enfin : } U_{\text{eff}} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

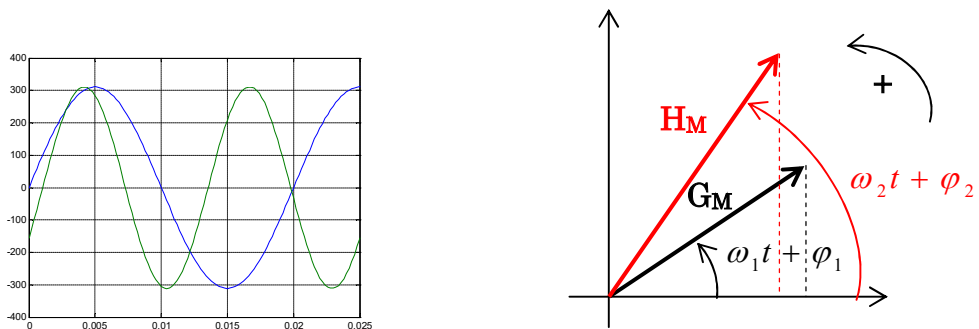
2 Représentations d'une grandeur sinusoïdale

Pour faciliter les calculs il est possible de faire appel à deux représentations des grandeurs sinusoïdales. Ces deux représentations consistent à associer à une grandeur sinusoïdale un vecteur tournant dans un plan. La projection de ce vecteur sur l'axe origine de phase peut alors donner accès à la grandeur considérée. La représentation peut être graphique, il s'agit de la représentation de Fresnel. Elle peut être analytique. En effet à tout vecteur

on peut associer un nombre complexe dont la partie réelle est égale à une composante de ce vecteur et la partie imaginaire à l'autre composante dans un repère orthonormé.

2.1 Représentation de Fresnel

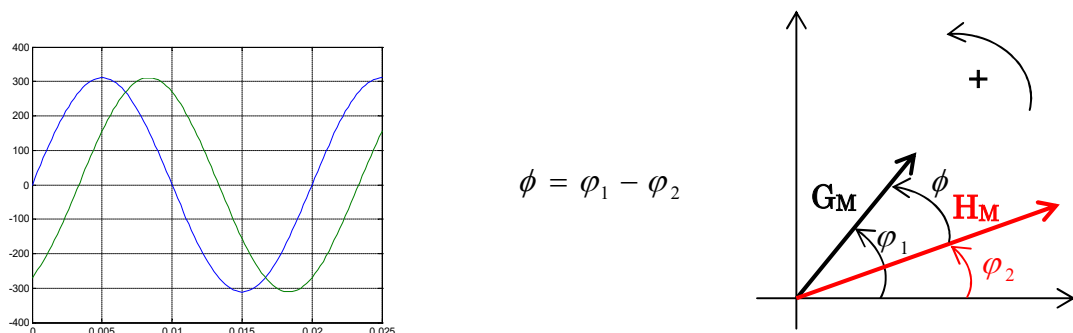
Le vecteur de Fresnel associé à un signal sinusoïdal est un vecteur tournant dont la vitesse angulaire est égale à la pulsation du signal. La norme de ce vecteur est égale à **l'amplitude maximale** du signal et l'angle polaire est à tout instant égal à la phase instantanée du signal. La valeur algébrique du signal est donnée par la projection du vecteur tournant sur l'axe de référence pour la phase.



$$h(t) = H_M \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$g(t) = G_M \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Lorsqu'on ne compose que des signaux de même période, on ne s'intéresse en fait qu'aux déphasages relatifs. Il n'est donc pas nécessaire de faire tourner les vecteurs. On se contente d'un vecteur fixe ayant pour norme l'amplitude maximale du signal et pour angle polaire son déphasage.



$$\phi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Dans le cas de plusieurs signaux de même fréquence, l'un d'eux est utilisé comme origine pour les phases.

Dans cette représentation, on utilise les propriétés géométriques de la figure obtenue pour la résolution du problème.

En plus, la valeur maximale est proportionnelle à la valeur efficace, donc on peut raisonner sur un vecteur d'amplitude la valeur efficace.

La représentation de Fresnel, n'est facilement exploitable en électricité que pour des circuits très simples.

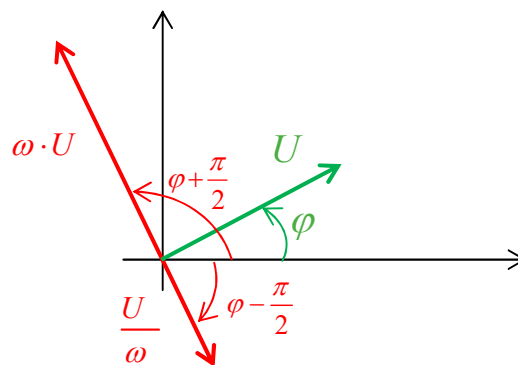
Dérivation et intégration :

Soit $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ alors $u'(t) = -U \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Comme $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ alors $u'(t) = U \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ ceci dit que la dérivation d'un vecteur revient à une multiplication par ω et une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$.

Soit $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ alors $\int u(t) = \frac{U}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

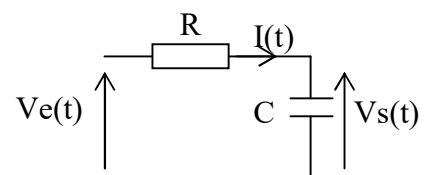
Comme $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ alors $\int u(t) = \frac{U}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$ ceci dit que l'intégration d'un vecteur revient à une division par ω et un retard de phase de $\frac{\pi}{2}$.



Exemple :

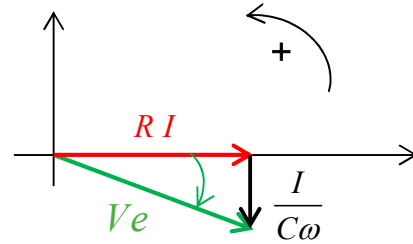
On donne la figure suivante :

$$V_e(\omega t) = R \cdot I(\omega t) + V_s(\omega t) \quad \text{et} \quad I(\omega t) = C \cdot \frac{dV_s(\omega t)}{dt}$$



$$V_s(\omega t) = \frac{1}{C\omega} \cdot I(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$V_e = \sqrt{(RI)^2 + \left(\frac{I}{C\omega}\right)^2} = I \cdot \underbrace{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}_Z$$



2.2 Représentation complexe

L'analogie entre le plan de Fresnel et le plan complexe conduit naturellement à représenter les vecteurs tournants associés aux grandeurs électriques sinusoïdales par des grandeurs complexes.

2.2.1 Notations

Une grandeur G sera notée en représentation complexe par \underline{G} et son conjugué par $\bar{\underline{G}}$.

Pour éviter toute confusion avec les courants, l'opérateur imaginaire i est noté j avec $j^2 = -1$, $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Les parties réelle et imaginaire de \underline{G} sont notées respectivement : $\Re(\underline{G})$ et $\Im(\underline{G})$. Au vecteur \vec{G} on associe le complexe $\underline{G} = \Re(\underline{G}) + j \cdot \Im(\underline{G})$.

Ainsi à l'intensité $i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$ on fait correspondre $\underline{i}(t) = I_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ et à la tension $v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$, on fait correspondre $\underline{v}(t) = V_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_v)}$. De cette façon la grandeur physique sera toujours la partie réelle de la grandeur complexe associée.

En effet :
$$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \Re(\underline{i}(t)) = \Re(I_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)})$$

De même :
$$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) = \Re(\underline{v}(t)) = \Re(V_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_v)})$$

2.2.2 Dérivation et intégration complexe

Soit $\underline{v}(t) = V_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_v)}$ alors :

$$\underline{v}'(t) = V_M \cdot j\omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi_v)} = j\omega \cdot \underline{v}(t)$$
 la dérivation d'un complexe revient à une multiplication par $j\omega$.

$\int \underline{v}(t) \cdot dt = V_M \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_v)} = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{v}(t)$ l'intégration d'un complexe revient à une division par $j\omega$.

2.2.3 Amplitude complexe

On définit l'amplitude complexe \underline{I} de $\underline{i}(t)$ telque $\underline{i}(t) = \underline{I} \cdot e^{j\omega t}$ et \underline{V} de $\underline{v}(t)$ telque $\underline{v}(t) = \underline{V} \cdot e^{j\omega t}$ comme suit :

$$\begin{cases} \underline{I} = I_M \cdot e^{j\varphi_i} = I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_i} \\ \underline{V} = V_M \cdot e^{j\varphi_v} = V \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_v} \end{cases} \quad V \text{ et } I \text{ étant les valeurs efficaces.}$$

2.2.4 Impédance complexe

On définit l'impédance complexe d'un dipôle parcouru par le courant $\underline{i}(t)$ et ayant aux bornes la tension $\underline{v}(t)$ par le rapport \underline{Z} entre la tension complexe aux bornes du dipôle et le courant complexe qui le traverse :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_v}}{I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{V}{I} \cdot e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = \frac{V}{I} \cdot e^{j(\varphi)} = Z \cdot e^{j(\varphi)} \text{ avec } \varphi = \varphi_v - \varphi_i.$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j(\varphi)} = Z \cdot \cos(\varphi) + j \cdot Z \cdot \sin(\varphi) = R + j \cdot X$$

$R = Z \cdot \cos(\varphi)$ est appelée résistance et $X = Z \cdot \sin(\varphi)$ est appelée réactance.

$$R^2 = Z^2 \cdot \cos^2(\varphi) \text{ et } X^2 = Z^2 \cdot \sin^2(\varphi) \rightarrow X^2 + R^2 = Z^2 \text{ et enfin : } Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Le déphasage φ introduit par l'impédance est tel que $\text{tg}(\varphi) = \frac{X}{R}$ soit :

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

2.2.5 Admittance complexe

$$\underline{Z} = R + j \cdot X$$

Par analogie avec la conductance $1/R$, on définit l'admittance complexe :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = A + j \cdot B$$

$$A = \frac{R}{R^2 + X^2} : \text{une conductance} \quad \text{et} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} : \text{une susceptance.}$$

3 Dipôles linéaires en régime sinusoïdal

Considérons les cas des trois dipôles de base :

3.1 Le résistor

$$v(t) = R \cdot i(t) \rightarrow \underline{v}(t) = R \cdot \underline{i}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t) \rightarrow \underline{Z} = R$$

L'impédance d'un résistor est sa résistance.

3.2 Le condensateur idéal

$$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt \rightarrow \underline{v}(t) = \frac{1}{C} \cdot \int \underline{i}(t) \cdot dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{i}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t) \rightarrow \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

L'impédance d'un condensateur de capacité C est : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

3.3 La bobine idéale

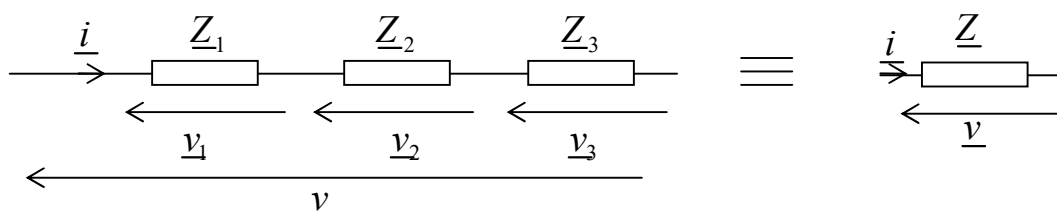
$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \underline{v}(t) = L \cdot \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = L \cdot j\omega \cdot \underline{i}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t) \rightarrow \underline{Z} = jL\omega$$

L'impédance d'une bobine d'inductance L est : $\underline{Z} = jL\omega = L\omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$.

3.4 Association d'impédances

Soient les trois impédances $\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot X_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j \cdot X_2$ et $\underline{Z}_3 = R_3 + j \cdot X_3$

3.4.1 Association série



On prend i comme origine des phases

$$\underline{i} = \underline{I} \cdot e^{j\omega t} = I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{v} = \underline{V} \cdot e^{j\omega t} = V \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

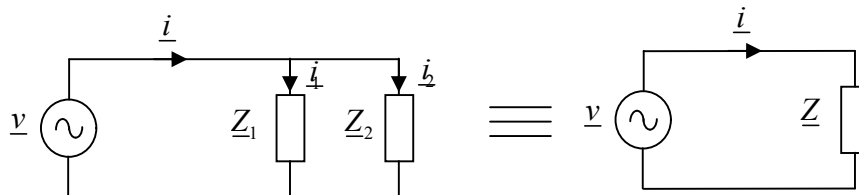
$$\text{Alors} \quad \underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{V}{I} \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{i} \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$$

$$\frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \sum Z_m = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (R_1 + R_2 + R_3) + j(X_1 + X_2 + X_3) = \underline{Z} = R + jX \quad \text{avec :}$$

$$R = \sum R_m, \quad X = \sum X_m, \quad Z = \sqrt{(\sum R_m)^2 + (\sum X_m)^2} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{\sum X_m}{\sum R_m}$$

3.4.2 Association parallèle



$$\underline{v} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{i}_1 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{i}_2 \quad \text{et} \quad \underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$$

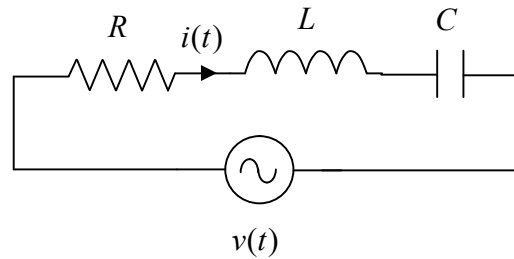
$$\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{v}}{\underline{Z}_2} = \underline{v} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) \rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Au contraire de l'association série, le calcul de l'impédance équivalente est un travail laborieux. Toutefois, les règles vues en continu restent vraies pour les impédances (complexes).

$$\text{En général pour } n \text{ impédances on a : } \underline{Z} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i}} \quad \text{ou encore : } \underline{Z} = \frac{\prod \underline{Z}_j}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \underline{Z}_j} .$$

4 Circuits résonnants

4.1 Circuit RLC série



4.1.1 Impédance équivalente

$$\underline{i}(t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{v}(t) = V \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{D'autre part : } \underline{v}(t) = R \cdot \underline{i}(t) + L \cdot \frac{d\underline{i}(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int \underline{i}(t) \cdot dt$$

$$\underline{v}(t) = R \cdot \underline{i}(t) + j\omega L \cdot \underline{i}(t) + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{i}(t) = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{i}(t)$$

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) ; \text{ le module est } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

On constate que l'impédance dépend de ω donc de la fréquence.

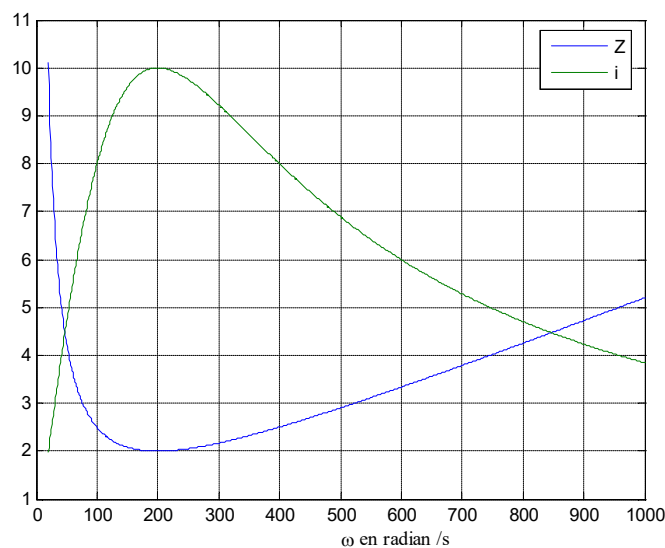
$$Z \text{ est minimale pour } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \text{ donc pour } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Z_m = R .$$

4.1.2 Résonance

Le courant I passe par un maximum lorsque Z est minimale ($\omega = \omega_0$).

C'est la résonance du courant.

On obtient pour $R = 2\Omega$, $L = 5mH$, $C = 5mF$ et $V = 20V$ une résonance de courant pour $\omega = 200 \text{ rad} \cdot s^{-1}$ comme le montre la figure suivante :



4.1.3 Déphasage

Pour ce circuit on a $\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ donc $\text{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ et $\cos\varphi = \frac{R}{Z} > 0$ alors $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$; de plus pour $\omega = \omega_0$ (résonance), $\varphi = 0$ donc le courant et la tension sont en phase. Pour $\omega < \omega_0$ le courant est en avance par rapport à la tension (le caractère capacitif domine) et pour $\omega > \omega_0$, le courant est en retard par rapport à la tension (le caractère inductif domine).

4.1.4 Facteur de qualité

Cherchons les valeurs de ω pour lesquelles $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$ donc résoudre l'équation : $LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$ on a $\Delta = R^2C^2 + 4LC > 0$

Les solutions sont : $\omega = \frac{\pm RC \pm \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$, les deux solutions retenues :

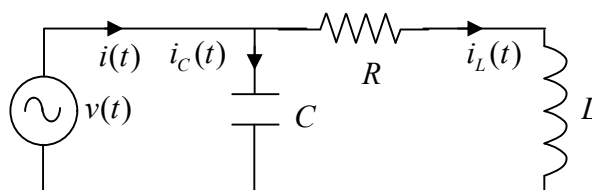
$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{+RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (\omega_2, \omega_1 > 0)$$

On définit le facteur de qualité du circuit par : $Q = \frac{\omega_0}{|\omega_2 - \omega_1|}$

Ce facteur de qualité caractérise la largeur de la résonance. Celle-ci est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est grand. En reportant les expressions des trois pulsations nous obtenons pour le facteur de qualité :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

4.2 Circuit RLC parallèle



4.2.1 Impédance du circuit

$$\underline{i}(t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{v}(t) = V \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{D'autre part : } \underline{v}(t) = R \cdot \underline{i}(t) + L \cdot \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \int \underline{i}(t) \cdot dt$$

$$\underline{i}(t) = \underline{i}_R(t) + \underline{i}_C(t) = \left(\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \right) \cdot \underline{v}(t)$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega C(R + j\omega L)} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 CL) + j\omega RC} ; \text{ le module est}$$

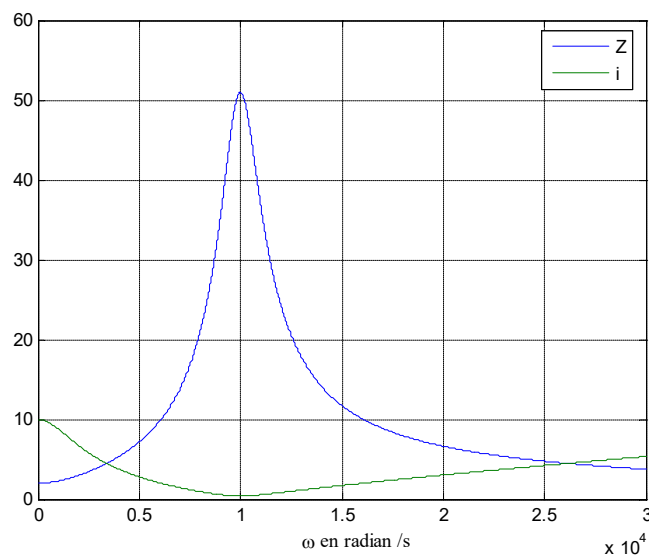
$$Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} : Z \text{ est maximale pour } \omega_0^2 LC = 1 \text{ donc pour}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Z_M = \frac{L}{CR} \sqrt{1 + R^2 \cdot \frac{C}{L}}$$

4.2.2 Résonance

Le courant I passe par un minimum lorsque Z est maximale ($\omega = \omega_0$) c'est un circuit bouchon ($I \square 0$).

On obtient pour $R = 2\Omega$, $L = 1mH$, $C = 10\mu F$ et $V = 20V$ une résonance pour $\omega = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ comme le montre la figure suivante :



4.2.3 Déphasage

Pour ce circuit on a
$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 CL) + j\omega RC} = \frac{R + j(\omega L(1 - \omega^2 CL) - \omega R^2 C)}{(1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

donc $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L(1 - \omega^2 CL) - \omega R^2 C}{R}$ et $\cos\varphi = \frac{R}{Z} > 0$ alors $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$; de plus

pour $\omega = \omega_0$ (résonnance), $\operatorname{tg}\varphi = -R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} < 0$ donc $\varphi < 0$ le courant est en avance de phase.

4.2.4 Facteur de qualité

$$Q = \frac{1}{R} \cdot (\omega_0 L) = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{(\omega_0 C)} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

5 Puissance en régime sinusoïdal

5.1 Puissance instantanée

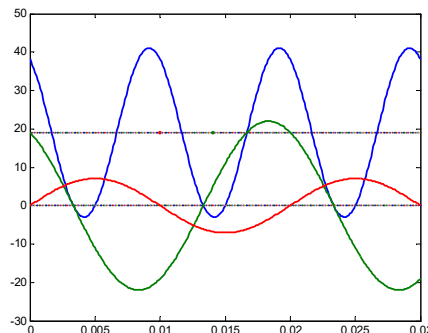
Nous avons vu qu'en convention récepteur la puissance reçue par un dipôle s'écrit : $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

$$\text{Avec : } \begin{cases} v(t) = V\sqrt{2} \cos \omega t \\ i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{on écrit : } p(t) = 2 \cdot I \cdot V \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Comme $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ alors on écrit la puissance $p(t)$:

$$p(t) = I \cdot V \cos \varphi + I \cdot V \cos(2\omega t + \varphi)$$

Le premier terme c'est la puissance dite active, le deuxième terme est une puissance fluctuante à fréquence double dont la moyenne est nulle.



5.2 Puissance active

C'est la puissance moyenne consommée et transformée en travail et exprimée en Watt.

$$\langle p(t) \rangle = \int p(t) dt = \int (I \cdot V \cos \varphi + I \cdot V \cos(2\omega t + \varphi)) dt = VI \cos \varphi$$

$$P = VI \cos \varphi$$

Dans le cas d'un dipôle résistif $\cos \varphi = 1$ et donc : $P = VI$

On constate que dans le cas d'un circuit purement inductif ou purement capacitif le déphasage est $\pm \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow \cos \varphi = 0$ d'où la puissance moyenne nulle.

Le condensateur et l'inductance ne consomment pas de la puissance active.

5.3 Puissance réactive

Par symétrie avec la puissance active, on définit la puissance réactive Q tel que : $Q = VI \sin \varphi$

Pour un dipôle résistif $\sin \varphi = 0$, alors il n'a aucun trait à la puissance réactive.

Pour un condensateur, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow \sin \varphi = -1$ et $Q = -VI = -C\omega \cdot V^2 = -\frac{I^2}{C\omega} < 0$

donc un condensateur fournit de la puissance réactive.

Pour une bobine, $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow \sin \varphi = 1$ et $Q = VI = L\omega \cdot I^2 = \frac{V^2}{L\omega} > 0$ donc une

bobine reçoit de la puissance réactive.

5.4 Puissance apparente et facteur de puissance

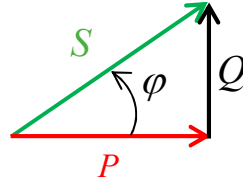
La puissance apparente consommée par un dipôle est définie par le produit des valeurs efficaces de la tension et du courant : $S = V \cdot I$

$$S^2 = V^2 \cdot I^2 = P^2 + Q^2 \quad \text{soit} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Le facteur de puissance est défini par $\lambda = \frac{P}{S}$ avec $P = VI \cos \varphi$ donc $\lambda = \cos \varphi$.

On peut donc déduire les formules et les règles suivantes :

- $P = VI \cos \varphi = S \cos \varphi$
- $Q = VI \sin \varphi = S \sin \varphi = P \cdot \operatorname{tg} \varphi$
- $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}$; $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$
- $S^2 = P^2 + Q^2$ d'où la représentation du triangle des puissances :



Pour une impédance $\underline{z} = R + jX = z \angle \varphi$, parcourue par un courant \underline{I} on a :

- $S = z \cdot I^2$
- $P = R \cdot I^2$
- $Q = X \cdot I^2$

5.5 Puissance complexe

On définit la puissance complexe par : $\underline{P} = \frac{1}{2} \cdot \underline{V} \cdot \underline{I}^*$ où \underline{V} et \underline{I}^* sont

respectivement les amplitudes complexes de $\underline{v}(t)$ et $\underline{i}^*(t)$ conjugué de $\underline{i}(t)$.

$$\underline{V} = V\sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_v} \quad \text{et} \quad \underline{I}^* = I\sqrt{2} \cdot e^{-j\varphi_i}$$

$$\underline{P} = VI \cdot e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = VI \cdot e^{j\varphi} \rightarrow \underline{P} = VI (\cos \varphi + j \sin \varphi) = VI \cos \varphi + jVI \sin \varphi$$

$$\underline{P} = P + jQ$$

6 Conclusion

Au cours de ce chapitre on a étudié les circuits électriques en régime sinusoïdal monophasé. On a mis en évidence l'importance du déphasage et de la fréquence dans le comportement des circuits linéaires en régime permanent sinusoïdal.